Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 4.1 Zeige, dass die Picard-Iterierten zu $\gamma(0) = 1$ im Vektorfeld $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y$ die Partialsummen der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion sind.

Beweis. Die Folge der Picard Iterierten der Differentialgleichung $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)); \gamma(t_0) = \gamma_0$ wird folgendermaßen definiert:

$$\gamma_0(t) = \gamma_0$$

$$\gamma_{n+1}(t) = \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} X(\gamma_n(s))\ ds$$

Zur Illustration sind die ersten 4 Iterierten für $X(y) = y; t_0 = 0; \gamma_0 = 1$ angegeben:

$\gamma_0(t) = 1$

$\gamma_1(t) = 1 + \int_0^t 1$ ds$= 1 + t$

$\gamma_2(t) = 1 + \int_0^t 1 + s$ ds$= 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

$\gamma_3(t) = 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{1}{2}s^2$ ds$= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

Mit Hilfe von *vollständiger Induktion nach n* wird im folgenden $\gamma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\ \forall n \in \mathbb{N}$ gezeigt und somit gilt $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \exp(t)$.

IA: siehe oben

IS: n$\to$ n+1

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1}(t) &= \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} X(\gamma_n(s))ds \\
&= 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} ds \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^t \frac{s^k}{k!} ds \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} t^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

$\square$

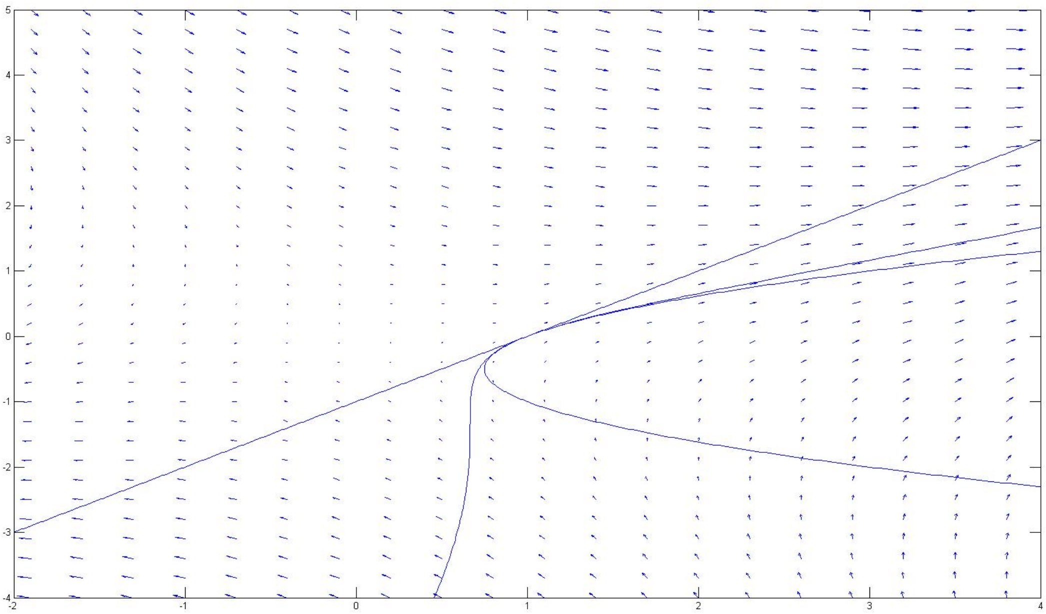
Aufgabe 4.2 Gegeben sei das Vektorfeld und die konstante Kurve

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$
$$\gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch den Punkt $\gamma_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die ersten drei Picard-Iterierten lauten:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t X(\gamma_0(s))ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$$
$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t X(\gamma_1(s))ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+2s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1+t+t^2 \\ t \end{pmatrix}$$
$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t X(\gamma_2(s))ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+2s+s^2 \\ 1+s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1+t+t^2+\frac{1}{3}t^3 \\ t+\frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld mit den drei Picard Iterationen ist auf dem folgenden Bild abgebildet



Die Lösung des Anfangwertproblems lautet:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})\exp(\sqrt{2}t) - (1-\sqrt{2})\exp(\sqrt{2}t) \\ \exp(\sqrt{2}t) - \exp(-\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Und somit ist der gesuchte Funktionswert $\gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})\exp(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (1-\sqrt{2})\exp(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \exp(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \exp(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix}$.

Der benutzte Quellcode zum Zeichnen des Vektorfeldes und der Picard Iterierten in 'Matlab' lautet:

```
%Vektorfeld
[x,y]=meshgrid(-4:.3:4,-4:.3:5); % spannt x,y-Gitter auf
dx=x+y; %1.Koordinate
dy=x-y; %2.Koordinate
quiver(x,y,dx,dy,0.3) %Erzeugung des Vektorfeldes
hold on

%Kurven abhängig von T
T=-3:.01:3
hold on
plot(1+T,T)
plot(1+T+T.^2,T)
plot(1+T+T.^2+1/3*T.^3,T+ 1/3*T.^3)
axis([-2 4 -4 5]) %Darstellungbereich der Kurven
```

Aufgabe 4.3 Betrachte das Vektorfeld $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$.
Behauptung: Es existiert eine eindeutige Integralkurve $\gamma : (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = 1$

Beweis. Benutze den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Gesucht ist also $\epsilon_u > 0$ für $B := \overline{B_r(u)}$ mit:

i) $\epsilon_u \max_{v \in B}(|X(v)|) < r$ und

ii) $\epsilon_u L < 1$,

wobei r der Radius der Kugel ist, auf dem das Vektorfeld X Lipschitz Stetig mit Konstanten L ist.
Nun berechne aus i) und ii) die Bedingungen, die ein *maximales* ϵ_u erfüllen muss:

1. $\max_{v \in B}(|X(v)|) = \max_{v \in B}(|v^2|) = (u + r)^2 = (1 + r)^2$ für $u = 1$ und
$\frac{r}{(1+r)^2}$ nimmt für $r = 1$ das Maximum bei $\frac{1}{4}$ an
$\Rightarrow \epsilon_u < \frac{r}{\max_{v \in B}(|X(v)|)} = \frac{r}{(1+r)^2} = \frac{1}{4}$

2. Der Mittelwertsatz liefert eine Lipschitzkonstante:
$L = \sup_{s \in [0,1]}(|DX((u+r) + s((u-r) - (u+r)))|) = \sup_{s \in [0,1]} |(2 \cdot (2 + s(0-2)))| = 2 \cdot (1 + r) = 4$
für $r = 1$
$\Rightarrow \epsilon_u < \frac{1}{L} = \frac{1}{4}$

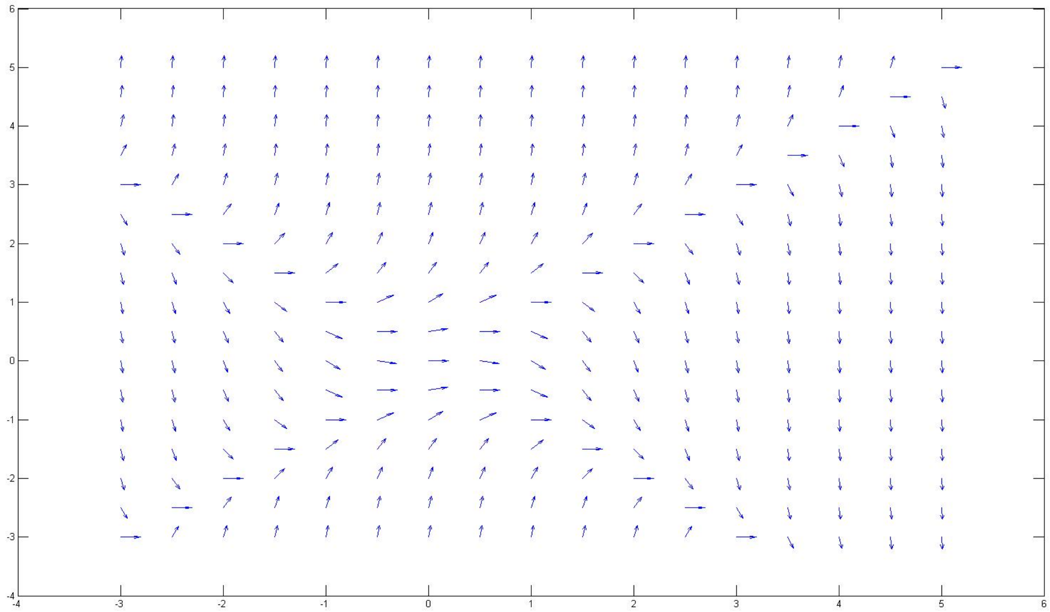
Also existiert genau eine Integralgleichung von X auf $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. $\square$

Aufgabe 4.4 Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = y^2 - x^2$.
Das zeitabhängige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ und zeitunabhängige Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ lauten:

$$\underline{\text{zeitabhängiges Vektorfeld}}: X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y^2 - x^2$$

$$\underline{\text{zeitunabhängiges Vektorfeld}}: X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Das Richtungsfeld der oben genannten Differentialgleichung und das Vektorfeld stimmen (bis auf Pfeillänge)überein:



Der geschätzte Wert einer Lösung u mit $u(0) = 1$ an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ lautet $u(\frac{1}{2}) \approx 2$.